GEOMETRIA DIFERENCIAL - FICHA 1

JOÃO PEDRO MARTINS DOS SANTOS

1.
Seja M uma variedade diferenciável conexa. Prove-se que as componentes conexas por arcos de M são conjuntos abertos.
Seja $A \subset M$ uma componente conexa por arcos e seja $p \in A$. Como M é uma variedade diferenciável, então existe um aberto $U \ni p$ que é homeomorfo a um disco aberto em $\mathbb{R}^{\dim M}$. Assim, U é conexo por arcos, e como U intersecta a componente conexa por arcos A, então $U \subset A$.
Como $p \in A$ é arbitrário, conclui-se que A é aberto.
Sendo $\{A_i\}_{i \in I}$ a família das componentes conexas por arcos de M, tem-se para cada $i \in I$ que $A_i = M \setminus \bigcup_{j \neq i} A_j$, e como todos os A_j são abertos, segue que A_i é fechado. Assim, todas as componentes conexas de M são conjuntos simultaneamente abertos e fechados, e como M é conexo, então M apenas tem uma componente conexa por arcos, ou seja, M é conexo por arcos.

2.

Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ dada por
$\phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. A matriz jacobiana de ϕ é:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

(a)

As componentes dos vectores $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial\theta}$ e $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ na base $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ correspondem à primeira, à segunda e à terceira colunas, respectivamente, da matriz jacobiana de ϕ, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}$$

(b)

A matriz inversa da matriz jacobiana de ϕ é:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi/r & \cos\theta\sin\varphi/r & -\sin\theta/r \\ -\sin\varphi/(r\sin\theta) & \cos\varphi/(r\sin\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

As componentes dos vectores $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ na base $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\}$ correspondem à primeira, à segunda e à terceira colunas, respectivamente, dessa matriz, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$